MATEMATIKA OLIMPIA
KÖRZETI SZAKASZ

2013. január 26.

XII. OSZTÁLY
M 1 – es program

1.) Értelmezzük a $G=(-1-a,1+a),\ a>0$ halmazon az $x*y=\dfrac{(x+y)(1+a)^2}{xy+(1+a)^2}$ műveletet.

a) Igazolja, hogy $(G,*)$ Abel-féle csoport!

b) Ha $\alpha=\dfrac{1+a}{2}$ számítsa ki $\alpha*\alpha*.....*\alpha$ értékét (*n*-szer α)!

2.) Határozza meg a $(Z,\circ),\ x\circ y=\ x+y-1, \forall x,y\in Z$ csoport automorfizmusait!

3.) Adott az $f:R\to R,\ f(x)=xe^x$ függvény és $F_0:R\to R$ *f*-nek az a primitív függvénye, amelynek grafikus képe átmegy a (0, –1) ponton. A $G=\{F_c:R\to R, F_c=F_0+c, c\in R\setminus\{1\}\}$ halmazon, értelmezzük a * műveletet a következőképpen: $F_a*F_b=F_{ab-a-b+2}$.

a) Igazolja, hogy $(G,*)$ kommutatív csoport!

b) Határozza meg azt a *c* valós számot, amelyre $(F_2\circ F_2)(1)=(F_c*F_c)(1)$, ahol $\circ$ a függvények összetevését jelöli!

4.) Határozza meg azokat az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvényeket, amelyekre $f(0)=1$ és létezik $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ primitívjük úgy, hogy $F(x)-f(x)=\sin^2 x,\ \forall x\in\mathbb{R}$

Megjegyzés:

Minden feladat kötelező.
Minden feladat 10 pontot ér.
Munkaidő 3 óra